

基于 χ^2 分布的聚类图像分割

黄文芝 王以治

(华中科技大学数学系计算数学教研室, 武汉 430074)

摘要 人们在对图像灰度值做统计分析时,大都采用正态分布来分析,但从大量的实验中发现,其大部分不是完全服从正态分布,有的甚至相差很远,这样就有必要用更好的分布来拟合图像灰度。通过对物体的颜色、光强进行分析发现,人们看到的物体颜色是多种环境——环境光强、漫反射、镜面反射等等共同作用的结果。这样如果单纯地用正态分布来分析就会出现较大的偏差,那么也就不能很好地拟合图像灰度分布曲线,因此这里提出了用 χ^2 分布来拟合图像灰度的分布曲线,实验结果表明,通过 χ^2 分布可以得到更好的分割效果。

关键词 图像分割 χ^2 分布 聚类分析

中图法分类号: TP391.41 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2004)02-0164-04

The Clustering Image Segmentation with Distribution

HUANG Wen-zhi, WANG Yi-zhi

(The Compute Mathematic Department of Huazhong University of Science & Technology, Wuhan 430074)

Abstract When the images are assayed by the statistics, all most of images are assayed by normal distribution. But in large numbers of experimentation most of the images can't submit to normal distribution perfectly. Some simulated result is different from the actual images. So it is necessary to assay the images by better distribution. When the color and the intensity of images are assayed, it can be found that the color of the object what people have seen is impacted by plenty of environments, such as the intensity light of the environment, diffused reflection and mirror reflection and so on. Then an object's color isn't symmetrical distribution. So it will turn up larger warp and can't simulate the distribution curve of the image greatly, if the image is assayed by normal distribution. So here the method that simulate curve by χ^2 distribution is proposed. χ^2 distribution is one of the methods that are common used in statistics. Sometimes χ^2 distribution can replace normal distribution. So χ^2 distribution is proposed. And better result of the segmentation has been gotten in the experimentation by χ^2 distribution.

Keywords image segmentation, χ^2 distribution, clustering analyse

1 引言

众所周知,图像分割就是将图像分成各具特性的区域,并提取感兴趣目标的技术和过程,是图像分析的关键步骤,过去的10年中,已提出了许多图像分割方法,其可粗略地分为基于直方图的分割技术(阈值分割等)、基于邻域的分割技术(边缘检测、区域增长等)、基于物理性质的分割技术(颜色聚类等)3类。

用聚类的方法分割彩色图像是根据图像中具有相似颜色特征的区域在彩色空间趋于形成点的聚类的性质^[1]来进行分割的,而在利用颜色做聚类分析时,人们大都是用正态分布来做统计分析,但笔者在

对图像进行观测时发现,在很多时候,正态分布并不能很好地拟合图像灰度统计分布曲线。如果是纯色的物体,不考虑外界因素,其图像灰度应该是能很好地服从正态分布的,但人们看到的物体都必然有外界作用。人们之所以能看到物体是由于光照的作用,即光照射到物体表面时,可能被物体吸收、反射或透射,当光的反射和透射部分进入人的视觉系统时,才使人们能看见物体^[2,3]。光的颜色由波长决定,光的亮度由光强决定,从物体表面反射出来的光的强度取决于光源的位置、光强、物质材质、物体表面位置、物体表面法线和视点的位置。反射光可分为泛光、漫反射和镜面反射光3部分,其中泛光在任何方向上都是均匀分布的,通常称为环境光;漫反射光是指物

体反射光中向空间均匀反射的光,其反射的光强与入射光的入射角的余弦成正比,即当入射光线垂直于物体表面时,物体最亮;镜面反射光是朝一定方向反射的光,因此,图像上呈现的颜色主要与反射光的波长和入射光的光强有关(图像上的颜色灰度值是由光强的颜色分量决定的),而当环境光强一定时,物体颜色主要与反射光和点光源入射光的夹角有关,正是由于光照射的不均匀性,致使人们看到的图像颜色不一定是对称分布的,因此图像灰度就不一定能很好地服从正态分布。下面将用理想的 Lambert 漫反射模型来具体分析各种光强与颜色(R、G、B)的关系,以便得出更好的拟合曲线。

2 概 述

正如前面所介绍的,人看到的物体颜色是环境光、漫反射和镜面反射共同作用的结果。在这里只考虑理想的 Lambert 漫反射模型^[1]。

$$I = k_a I_a + k_d I_1 \cos \theta \quad (1)$$

其中, I_a 为入射光的环境光强, k_a 为物体表面对环境光的漫反射系数, k_d 为物体表面的漫反射系数, $0 \leq k_d \leq 1$, I_1 为点光源所发出的入射光强度, θ 为表面法线 N 与入射光线 L 的夹角如图 1 所示。

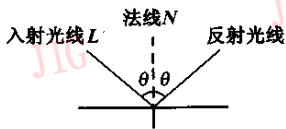


图 1

由于环境光是从各个方向入射到物体表面上的,如室内环境光是墙壁、天花板、地板及其他物体之间光的多次反射的结果,因此对于特定的物体表面,环境光可用一个常数项来模拟,并有一个不变的环境光反射系数。这样计算时就只需考虑漫反射项。

$$I_d = k_d I_1 \cos \theta \approx k_d I_1 \left(1 - \frac{\theta^2}{2} \right) = k_d I_1 - \frac{1}{2} k_d I_1 \sigma^2 \left(\frac{\theta}{\sigma} \right)^2 \quad (2)$$

由于对于固定的环境, $k_d I_1$ 是固定的,而变化的只是 θ ,同时由于入射光的角度不同,即 θ 是在 $0 - \frac{\pi}{2}$ 之间变化的,因此由统计分析知识可以假设 θ 的变化是服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 的,其中, μ 是 θ 的期望值, σ 是 θ 的方差。令 $\varphi = \frac{\theta}{\sigma}$, 则 φ 服从正态分布

$N(\delta, 1)$, 其中 $\delta = \frac{\mu}{\sigma}$ 。若有 $n(n \geq 1)$ 个点光源,则在表面一个点产生的漫反射光强为

$$I_d = k_d \sum_{j=1}^n I_{p,j} \cos \theta_j$$

其中, $I_{p,j}$ 是点光源 j 在 p 点处的光强。

由于物体漫反射光光强与入射光光强和入射光与法线的夹角有关,即角度的变化可以引起漫反射光光强的变化,因此可以假设该光强对于所有的点光源的强度是一样的,即 $I_{p,j} = I_{p,i}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$; $\theta_j \neq \theta_i$, $i \neq j$ 则

$$I_d = k_d I_1 \sum_{j=1}^n \cos \theta_j = n k_d I_1 - \frac{1}{2} k_d I_1 \sigma^2 \sum_{j=1}^n \cos \left(\frac{\theta_j}{\sigma} \right)^2 \quad (3)$$

根据前面所述, $\varphi_j = \frac{\theta_j}{\sigma}$ 服从 $N(\delta_j, 1)$, 因此有

定理 1 对于特定的物体,在固定的环境光强下,对于理想的完全漫反射物体,物体表面的漫反射光强 $I = c + b\varphi^2$ 服从以下分布

$$p(x) = -\frac{1}{d} \sum_{k=0}^{\infty} \left[e^{-\left(\delta^2 + \frac{x-c}{d} \right) / 2} \frac{1}{k! \Gamma\left(\frac{n}{2} + k \right)} \times \left(\frac{\delta^2}{2} \right)^k 2^{-\left(\frac{1}{2}n+k \right)} \left(\frac{x-c}{d} \right)^{\frac{1}{2}n+k-1} \right] \quad (4)$$

这里, $\Gamma(\cdot)$ 表示伽马函数, $c = k_a I_a + n k_d I_1$, $d = \frac{1}{2} k_d I_1 \sigma^2$, $\delta^2 = \delta_1^2 + \delta_2^2 + \dots + \delta_n^2$, 记为 $p(c, d, n, \delta)$ 。

这个分布相当于中心 $\chi^2(n)$ 的分布的伸缩与平移,若令 $y = \frac{x-c}{d}$, 则它即是一个非中心 $\chi^2(n)$ 分布^[4]。

3 参数估计

对于 RGB 彩色图像而言,图像上反映的物体任一点的漫反射光强是由红(R)、绿(G)、蓝(B)3 分量组成的,对于每一种颜色分量都满足式(1)^[3],即

$$I_R = k_{aR} I_{aR} + k_{dR} I_{1R} \cos \theta$$

$$I_G = k_{aG} I_{aG} + k_{dG} I_{1G} \cos \theta$$

$$I_B = k_{aB} I_{aB} + k_{dB} I_{1B} \cos \theta$$

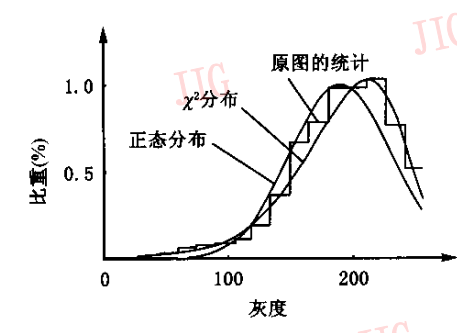
其中, I_R 、 I_G 、 I_B 分别代表红、绿、蓝 3 分量。

因此它们也都满足定理 1,若它们所对应的点光源数相同,则它们分别服从 $p_R(c_R, d_R, n, \delta)$ 、 $p_G(c_G, d_G, n, \delta)$ 、 $p_B(c_B, d_B, n, \delta)$ 。

由于式(4)是中心 χ^2 分布的平移和伸缩,因此为了计算方便,可采用中心的 χ^2 分布来进行平移和伸缩,即在式(4)中,令 $\delta=0$,则式(4)变为

$$p(x)=-\frac{1}{d2^{n/2}\Gamma(n/2)}\left(\frac{x-c}{d}\right)^{n/2-1}e^{-\frac{x-c}{2d}} \quad (5)$$

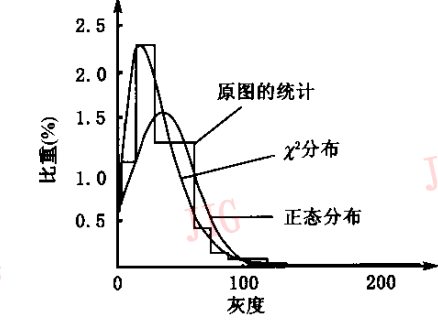
这样通过统计就可以得出图像灰度值的一阶中心矩、二阶中心矩和三阶中心矩的矩估计,进而可以计算出 c,d,n 的值



(a) 图版 I 图 1 中对象 c 的灰度统计曲线拟合
($c=287,d=-9.5238,n=10$)

$$c=E(X)-\frac{(E(X-E(X))^2)^2}{E(X-E(X))^3}$$
$$d=\frac{E(X-E(X))^3}{4\times E(X-E(X))^2}$$
$$n=\frac{8\times (E(X-E(X))^2)^3}{(E(X-E(X))^3)^2} \quad (6)$$

通过对 χ^2 分布与正态分布进行比较可以看出, χ^2 分布能更好地拟合物体漫反射光强的实际分布,图 2 所示为图版 I 图 1 中图像灰度统计曲线的拟合。



(b) 图版 I 图 1 中对象 d 的灰度统计曲线拟合
($c=-2,d=6.7797,n=5$)

图 2 图像灰度统计曲线的拟合

利用 $\epsilon_N=\sum_{k=1}^N|f_k(x)-\hat{f}(x)|^2$ 可以得出物体漫反射光强的正态分布曲线 $\hat{f}_k(x)$ 与实际图像灰度的统计曲线 $f_k(x)$ 的误差分别是 $0.0021,2.5674\times 10^{-4}$,而 χ^2 分布拟合出来的灰度值与实际图像灰度值的误差分别是 $0.0011,1.4568\times 10^{-4}$,由此可以看出,用 χ^2 分布拟合出来的灰度值误差都相应地减少了很多。表 1、表 2 是对图版 I 图 1 中具体的一朵黄色花(对象 a)分别用 R、G、B 3 种颜色分量进行分割的结果,即表示黄花归为哪一类的情况,若归为黄花类的越多,则效果越好(值为 1)。可以看出,用 χ^2 分布分割的效果明显比用正态分布的分割效果好很多,特别是对于图像上颜色不均匀的物体。

表 1 用正态分布对 R、G、B 分量分别进行的分割

分量	图版 I 图 1 中对象			
	a	b	c	d
R	0.637 1	0.098 3	0.261 4	0.003 2
G	0.668 2	0.051 8	0.278 8	0.001 2
B	0.940 6	0.007 7	0.044 0	0.007 7

表 2 用 χ^2 分布对 R、G、B 分量分别进行的分割

分量	图版 I 图 1 中对象			
	a	b	c	d
R	0.911 3	0.061 2	0	0.275
G	0.805 1	0.082 2	0	0.112 8
B	0.956 2	0	0.043 7	1.2299×10^{-4}

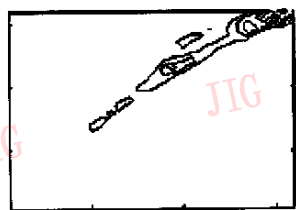
另外,还可以将分布推广到二维的情况,相应的统计式应变为

$$Y=C+DX \quad (7)$$

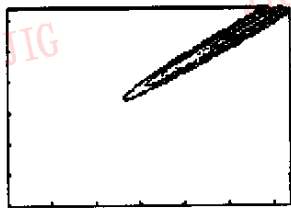
其中, $Y=(y_1,y_2)^T$, $X=(x_1,x_2)^T$, $C=(a_1,a_2)^T$, D 是 2×2 的矩阵。

对于 RGB 图像,若考虑其中的两种颜色,则得出的 RGB 颜色灰度分布等高线图如图 3(a) 所示,由该图可以看出,它的最高点偏向外一些,而用正态分布拟合得出的颜色灰度分布等高线图如图 3(b) 所示,它的中心点偏里面一些,而用二维的 χ^2 分布拟合的结果与原图更接近(如图 3(c) 所示)。

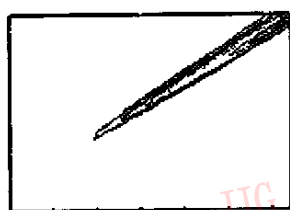
图 3(a)是图版 I 图 1 中黄花灰度值的实际分布等高线图,而图 3(b)是用相应正态分布拟合的黄花灰度值分布等高线图,图 3(c)是相应的二维的 χ^2 分布拟合的黄花灰度值分布等高线图,中间等高线比较密集的地方是灰度值分布较集中的区域,从图中可以看出,二维的 χ^2 分布比正态分布要拟合得好一些,而正态分布的中心则偏一些。对于图 3(c),参数分别为 $C=(0.9847,1.1171)^T$, $D=\begin{bmatrix}-0.046 & 0.0010 \\ 0.0070 & -0.0276\end{bmatrix}$, $N=(7,7)^T$,这里 C 的值和 D 的主对角线上的值由相应的期望和方差值决定,并可由式(6)计算得出,而 N 的值还与经验有关。



(a) 实际的颜色灰度分布图



(b) 用正态分布拟合的结果



(c) 用二维分布拟合的结果

图3 两种不同分布拟合得出的颜色灰度分布图

虑更好地运用 χ^2 分布,即通过找出比较好的方法来寻找 n 值,以解决简化计算量的问题。

参考文献

- 1 Park Sang Ho, Yun Dong, Lee Sang U, K. Color image segmentation based on 3-D clustering; morphological approach [J]. Pattern Recognition, 1998, 31(9): 1061~1076.
- 2 李建平. 计算机图形学原理教程[M]. 成都: 电子科技大学出版社, 1998.
- 3 王飞. 计算机图形学基础[M]. 北京: 北京邮电大学出版社, 2000.
- 4 张尧庭, 方开泰. 多元统计分析引论[M]. 北京: 科学出版社, 1997.



黄文芝 1978年生, 2000年于湖北三峡大学数学系获学士学位, 现为华中科技大学研究生。主要从事 MPEG 等视频图像处理方面的研究。



王以治 1945年生, 副教授, 1968年毕业于北京大学力学系。主要从事应用软件开发和图像处理、目标检测、图像识别等方面的研究。

4 实验

前面考虑的是一维、二维的情况, 对于真彩色图像, 则要考虑三维的情况。可以将 χ^2 分布推广到多维的情况, 式(7)中相应的 $Y = (y_1, y_2, \dots, y_k)^T$, $X = (x_1, x_2, \dots, x_k)^T$, $C = (c_1, c_2, \dots, c_k)^T$, 而 D 则是 $k \times k$ 矩阵。

本文先用三维的 χ^2 分布来对真彩色图像进行分割, 则 $k=3$; 然后再由贝叶斯决策来判断分类的情况, 图版 I 图 2 所示是将图版 I 图 1 分成 4 类。

分别用正态分布和三维的 χ^2 分布做了聚类分析, 三维的 χ^2 分布所对应的参数(对图版 I 图 1 中的对象 a 而言)为

$$C = (0.9847, 1.1171, 0.0011)^T, N = (7, 7)^T$$

$$D = \begin{pmatrix} -0.0460 & 0.0100 & 0.2000 \\ 0.1000 & -0.0276 & 0.0200 \\ 0.1000 & 0.0010 & 0.2236 \end{pmatrix}$$

由二维的和三维的分析可以看出, C 的值和 D 的主对角线上的值由相应的期望和方差值决定, 其可由式(6)计算得出, 而 N 的值还与经验有关, 一般取在 2~10 的范围内。

从图 3 可以发现, 对于图版 I 图 1 中的黄色花(对象 a), 由于花本身的凹凸性及反射光的强度问题, 人眼看到的并不是很纯的颜色, 而是中间的颜色偏深, 这样用正态分布就不能把这朵花当成整体分割出来, 如图版 I 图 2(a)所示, 而用 χ^2 分布就能很好地解决这一问题, 如图版 I 图 2(b)所示。

5 结论

本文提出了一种解决多光源图像分割问题的方法, 虽然 χ^2 分布可以更好地用于聚类分析, 但它也有不足之处, 即它计算量相应偏大, 并且 n 值的选择直接影响分割的效果, 因此在以后的工作中, 可以考